103 學年度指定科目考試數學乙非選擇題參考答案

數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科試題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請詳見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

103 學年度指定科目考試數學乙非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)題

解 1：1. 因 $\overline{AB}=(12,16)=4(3,4)$，又直線 L 通過 A 點且與線段 $\overline{AB}$ 垂直，可知直線 L 的方向向量為 $(4,-3)$ 或 $(-4,3)$

2. 直線 L 方向上的單位向量為 $\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

3. 由 $(11,2)+5\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)=(15,-1)$ 及 $(11,2)+5\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)=(7,5)$，

得知：C,D 兩點的坐標為 $(15,-1),(7,5)$

解 2：1. 由直線 L 的方向向量 $(4,-3)$，可設直線 L 的參數式：$\begin{cases} x=11+4t \\ y=2-3t \end{cases}$，

其中 t 為實數

2. 由點 C,D 與 A 點相距距離為 5，可列式：$\sqrt{(11+4t-11)^2+(2-3t-2)^2}=5$，

解得 $t=\pm 1$，可知：C,D 兩點的坐標為 $(15,-1),(7,5)$

解 3：列出聯立方程式 $\begin{cases} (x-23)^2+(y-18)^2=425 \\ (x-11)^2+(y-2)^2=25 \end{cases}$，再解出 $(x,y)=(15,-1),(7,5)$

第(2)題

解 1：利用行列式求ΔOCD面積。面積$=\left|\ \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}15 & -1\\ 7 & 5\end{vmatrix}\ \right|=41$

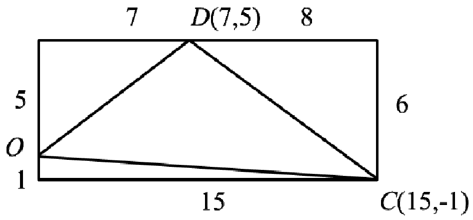
解 2：利用外積求ΔOCD面積。面積$=\dfrac{1}{2}\left|(7,5,0)\times(15,-1,0)\right|=\dfrac{1}{2}\left|(0,0,-82)\right|=41$

解 3：利用（底×高）÷2 求ΔOCD面積。點O到直線$L:3x+4y=41$的距離為$\dfrac{41}{5}$，

所以，ΔOCD的面積$=\dfrac{1}{2}\times10\times\dfrac{41}{5}=41$

解 4：利用擴大矩形面積扣減 3 個小三角形面積求ΔOCD面積。

如圖，將ΔOCD擴大成一矩形，

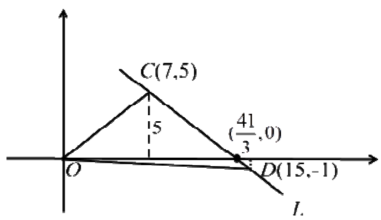


故ΔOCD面積$=15\times6-\dfrac{1}{2}(15\times1+7\times5+8\times6)=41$

解 5：利用切割成 2 個小三角形求ΔOCD面積。

直線$L:3x+4y=41$的x軸截距為$\dfrac{41}{3}$，

所以，ΔOCD的面積$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{41}{3}\times5+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{41}{3}\times1=41$



解 6：利用正弦值求ΔOCD面積。由$\cos\angle COD=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}}{\overline{OC}\times\overline{OD}}=\dfrac{100}{\sqrt{226}\times\sqrt{74}}$，

得知$\sin\angle COD=\dfrac{82}{\sqrt{226}\times\sqrt{74}}$，

故ΔOCD面積$=\dfrac{1}{2}\overline{OC}\times\overline{OD}\times\sin\angle COD=\dfrac{1}{2}\sqrt{226}\times\sqrt{74}\times\dfrac{82}{\sqrt{226}\times\sqrt{74}}=41$

第二題

第(1)題

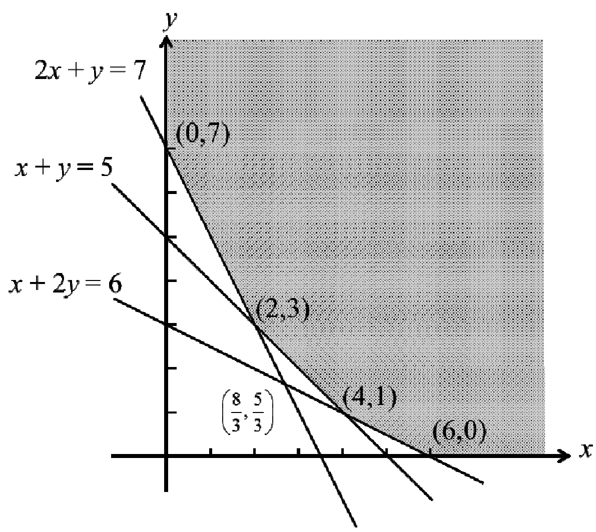
設工廠要買進 x 塊甲規格鐵板， y 塊乙規格鐵板。

1. 由甲規格的鐵板每塊的成本為 400 元，乙規格的鐵板每塊的成本為 320 元，得目標函數為 $p(x,y)=400x+320y$

2. 由題意知 x,y 需滿足下列聯立不等式: $\begin{cases} 8x+4y\geq 28 \\ 4x+4y\geq 20 \\ 8x+16y\geq 48 \end{cases}$ （或 $\begin{cases} 2x+y\geq 7 \\ x+y\geq 5 \\ x+2y\geq 6 \end{cases}$ ）

第(2)題

由聯立不等式可繪出此可行解區域如下圖的灰色區域（含邊界）。其四個頂點坐標為 $(6,0),(4,1),(2,3),(0,7)$



第(3)題

解 1：頂點法

1. 將四個正確頂點代入目標函數

頂　　點	$(6,0)$	$(4,1)$	$(2,3)$	$(0,7)$
$p(x,y)=400x+320y$	2400	1920	1760	2240

2. 比較大小可知：當 $x=2, y=3$ 時，工廠所需的最低成本為 $p(2,3)=1760$ 元。

解 2：平行線法

畫出正確的可行解區域下（必須標示邊界，且在可行解區域畫斜線或陰影），當直線 $400x+320y=k$ 在可行解區域掃動時，因目標函數所決定直線之斜率 $m=-\dfrac{5}{4}$ 介於 -1 與 -2 之間，故得知在當 $x=2, y=3$ 時，工廠所需的最低成本為 $p(2,3)=1760$ 元。

註： 1. 若以頂點法解題（解 1），必須將四個正確的頂點代入目標函數，求出正確的目標函數值後，比較大小才能得到結論，否則將被扣分。

2. 若以平行線法解題（解 2），必須標示出正確的可行解區域，並說明目標函數所決定直線之斜率 $-\dfrac{5}{4}$ 介於 -1 與 -2 之間，或在正確可行解區域圖上，畫出與直線 $400x+320y=k$ 平行的一組平行線，才能得出最低成本（1760）發生在頂點 $(2,3)$。