

大學入學考試中心

九十二學年度學科能力測驗試題

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單一選擇題 5 題，多重選擇題 6 題，填充題第 A 至 I 題共 9 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液
答錯不倒扣

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

(一) 填答選擇題時，只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 ₃ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄													
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若多重選擇題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 ₁ 與 ₃ 劃記，如：

10	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
----	-------------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

(二) 填充題的題號是 A, B, C, ...，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須

分別在答案卡上的第 18 列的 ₃ 與第 19 列的 ₈ 劃記，如：

18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 ₋ 與第 21 列的 ₇ 劃記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

試題後附有參考公式及可能用到的對數值與參考數值

第一部分：選擇題

壹、單一選擇題

說明：第1至5題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得5分，答錯不倒扣。

1. 試問有多少個正整數 n 使得 $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{10}{n}$ 為整數？
(1) 1個 (2) 2個 (3) 3個 (4) 4個 (5) 5個
2. 若 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$ ，則多項式 $g(x) = f(f(x))$ 除以 $(x-2)$ 所得的餘式為
(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11
3. 若 $(4+3i)(\cos\theta + i\sin\theta)$ 為小於 0 的實數，則 θ 是第幾象限角？
(1) 第一象限角 (2) 第二象限角
(3) 第三象限角 (4) 第四象限角
(5) 條件不足，無法判斷
4. 設 ABC 為坐標平面上三角形， P 為平面上一點且 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ，則
 $\frac{\Delta ABP \text{面積}}{\Delta ABC \text{面積}}$ 等於
(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{2}{3}$

5. 根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後， t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1-2^{-kt})\%$ ，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70% 的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99% 的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？
- (1) 5 小時 (2) $7\frac{1}{2}$ 小時 (3) 9 小時 (4) $11\frac{1}{2}$ 小時 (5) 13 小時

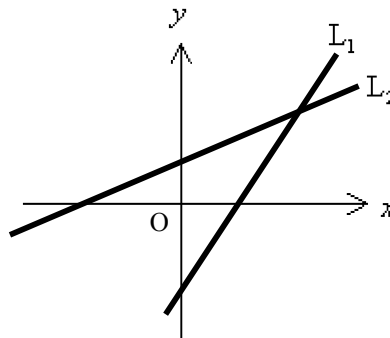
貳、多重選擇題

說明：第 6 至 11 題，每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題答對得 5 分，答錯不倒扣，未答者不給分。只錯一個可獲 2.5 分，錯兩個或兩個以上不給分。

6. 如右圖，兩直線 L_1 、 L_2 之方程式分別為 $L_1 : x+ay+b=0$ ， $L_2 : x+cy+d=0$ ；

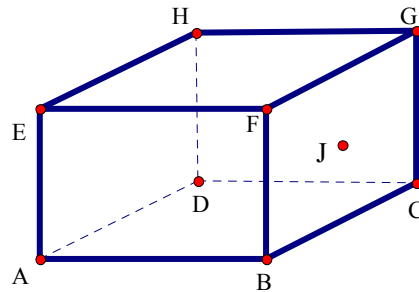
試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $a > 0$
 (2) $b > 0$
 (3) $c > 0$
 (4) $d > 0$
 (5) $a > c$



7. 如右圖， $ABCD-EFGH$ 為一平行六面體， J 為四邊形 $BCGF$ 的中心，如果 $\vec{AJ} = a\vec{AB} + b\vec{AD} + c\vec{AE}$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $\frac{1}{3} < b < \frac{2}{3}$
- (2) $a + b + c = 2$
- (3) $a = 1$
- (4) $a = 2c$
- (5) $a = b$



8. 以下各數何者為正？

- (1) $\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$
- (2) $\log_2 3 - 1$
- (3) $\log_3 2 - 1$
- (4) $\log_{\frac{1}{2}} 3$
- (5) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$

9. 下列哪些函數的最小正週期為 π ？

- (1) $\sin x + \cos x$
- (2) $\sin x - \cos x$
- (3) $|\sin x + \cos x|$
- (4) $|\sin x - \cos x|$
- (5) $|\sin x| + |\cos x|$

10. 假設坐標平面上—非空集合 S 內的點 (x, y) 具有以下性質：「若 $x > 0$ ，則 $y > 0$ 」。
試問下列哪些敘述對 S 內的點 (x, y) 必定成立？

- (1) 若 $x \leq 0$ ，則 $y \leq 0$ ； (2) 若 $y \leq 0$ ，則 $x \leq 0$ ；
(3) 若 $y > 0$ ，則 $x > 0$ ； (4) 若 $x > 1$ ，則 $y > 0$ ；
(5) 若 $y < 0$ ，則 $x \leq 0$ 。

11. 設 $\pi_a : x - 4y + az = 10$ (a 為常數)、 $E_1 : x - 2y + z = 5$ 及 $E_2 : 2x - 5y + 4z = -3$ 為坐標空間中的三個平面。試問下列哪些敘述是正確的？

- (1) 存在實數 a 使得 π_a 與 E_1 平行；
(2) 存在實數 a 使得 π_a 與 E_1 垂直；
(3) 存在實數 a 使得 π_a, E_1, E_2 交於一點；
(4) 存在實數 a 使得 π_a, E_1, E_2 交於一直線；
(5) 存在實數 a 使得 π_a, E_1, E_2 沒有共同交點。

第二部分：填充題

說明：1. 第 A 至 I 題，將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (12-34)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 a_1, a_2, \dots, a_{50} 是從 $-1, 0, 1$ 這三個整數中取值的數列。若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{50} = 9$ 且

$$(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \dots + (a_{50} + 1)^2 = 107, \text{ 則 } a_1, a_2, \dots, a_{50} \text{ 當中有幾項是 } 0?$$

答： 12 13 項。

B. 金先生在提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個 3，一個 8，一個 9，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試。請問他只試一次就成功的機率有多少？答： $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}\textcircled{16}}$ 。(化成最簡分數)

C. 設 $A(1,0)$ 與 $B(b,0)$ 為坐標平面上的兩點，其中 $b > 1$ 。若拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ 上有一點 P 使得 $\triangle ABP$ 為一正三角形，則 $b = \underline{\textcircled{17}}$ 。

D. 設 P 為雙曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上的一點且位在第一象限。若 F_1 、 F_2 為此雙曲線的兩個焦點，且 $\overline{PF_1} : \overline{PF_2} = 1:3$ ，則 $\triangle F_1PF_2$ 的周長等於 $\underline{\textcircled{18}\textcircled{19}}$ 。

E. 在坐標空間中，通過 $O(0,0,0)$ ， $N(0,0,1)$ ， $P(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4}, -\frac{1}{2})$ 三點的平面與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 相交於一個圓 C ，則圓 C 的劣弧 \widehat{NP} 的弧長等於 $\frac{\textcircled{20}}{\textcircled{21}}\pi$ 。(化成最簡分數)

(所謂劣弧 \widehat{NP} 是指圓 C 上由 N, P 兩點所連接的兩弧中較短的那一段弧。)

- F. 設 k 爲一整數。若方程式 $kx^2 + 7x + 1 = 0$ 有兩個相異實根，且兩根的乘積介於 $\frac{5}{71}$ 與 $\frac{6}{71}$ 之間，則 $k = \underline{\textcircled{22} \textcircled{23}}$ 。
- G. 在只有皮尺沒有梯子的情形下，想要測出一拋物線形拱門的高度。已知此拋物線以過最高點的鉛垂線爲對稱軸。現甲、乙兩人以皮尺測得拱門底部寬爲 6 公尺，且距底部 $\frac{3}{2}$ 公尺高處其寬爲 5 公尺。利用這些數據可推算出拱門的高度爲 $\underline{\frac{\textcircled{24} \textcircled{25}}{\textcircled{26} \textcircled{27}}}$ 公尺。
(化成最簡分數)
- H. 某次數學測驗共有 25 題單一選擇題，每題都有五個選項，每答對一題可得 4 分，答錯倒扣 1 分。某生確定其中 16 題可答對；有 6 題他確定五個選項中有兩個選項不正確，因此這 6 題他就從剩下的選項中分別猜選一個；另外 3 題只好亂猜，則他這次測驗得分之期望值爲 $\underline{\textcircled{28} \textcircled{29}}$ 分。(計算到整數爲止，小數點以後四捨五入。)
- I. 根據統計資料，1 月份台北地區的平均氣溫是攝氏 16 度，標準差是攝氏 3.5 度。一般外國朋友比較習慣用華氏溫度來表示冷熱，已知當攝氏溫度爲 x 時，華氏溫度爲 $y = \frac{9}{5}x + 32$ ；若用華氏溫度表示，則 1 月份台北地區的平均氣溫是華氏 $\underline{\textcircled{30} \textcircled{31} \textcircled{32}}$ 度，標準差是華氏 $\underline{\textcircled{33} \textcircled{34}}$ 度。(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。)

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_2 \neq x_1$.

3. 等比數列 $\langle ar^{n-1} \rangle$ 的前 n 項之和 $S_n = \frac{a \cdot (1 - r^n)}{1 - r}$, $r \neq 1$.

4. $\triangle ABC$ 的正弦及餘弦定理

(1) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, R 為外接圓的半徑(正弦定理)

(2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (餘弦定理)

5. 統計公式：

算術平均數 $M(= \bar{X}) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

標準差 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$; $\sqrt{3} \approx 1.732$; $\sqrt{5} \approx 2.236$; $\sqrt{6} \approx 2.449$; $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$, $\log_{10} 3 \approx 0.4771$, $\log_{10} 5 \approx 0.6990$, $\log_{10} 7 \approx 0.8451$