

大學入學考試中心
九十三學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內作答，選擇題答錯均倒扣。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，請在規定之欄位作答，並於題號欄標明題號。

作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 選擇題：只用 1, 2, 3, 4 等四個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 5, 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 ₃ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±	
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 10 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 ₁ 與 ₃ 劃記，如：

10	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
----	-------------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 ₋ 與第 21 列的 ₇ 劃記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

祝考試順利

第壹部分（佔 76 分）

一、單選題（6%）

說明：第1題，選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。答對得6分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣2分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. 設方程式 $x^5 = 1$ 的五個根為 $1, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ ，則 $(3 - \omega_1)(3 - \omega_2)(3 - \omega_3)(3 - \omega_4) =$
- (1) 81
 - (2) 162
 - (3) 121
 - (4) 242

二、多選題（32%）

說明：第2至5題，每題各有4個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題8分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得2分；每答錯一個選項，倒扣2分，完全答對得8分。整題未作答者，不給分亦不扣分。若在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣2分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

2. 根據對數表， $\log 2$ 的近似值是 0.3010， $\log 3$ 的近似值是 0.4771。下列選項有哪些是正確的？
- (1) $10^9 > 9^{10}$ 。
 - (2) $10^{12} < 12^{10}$ 。
 - (3) $10^{11} > 11^{10}$ 。
 - (4) 方程式 $10^x = x^{10}$ 有一負根。

3. 正四面體的四個頂點落在以原點 $O(0,0,0)$ 為球心、半徑為 1 的球面上，已知一頂點 P 的坐標為 $(0,0,1)$ ，另一頂點 Q 的坐標為 (a,b,c) 。下列選項有哪些必定是正確的？
- (1) \overrightarrow{OP} 與 \overrightarrow{OQ} 的夾角為 120° 。
 - (2) $a^2 + b^2 > c^2$ 。
 - (3) $ab > 0$ 。
 - (4) $c < 0$ 。
4. 設 $a > 0$ ，令 $A(a)$ 表示 x 軸、 y 軸、直線 $x = a$ 與函數 $y = 2 + \sin x$ 的圖形所圍成的面積。下列選項有哪些是正確的？
- (1) $A(a + 2\pi) = A(a)$ 恆成立。
 - (2) $A(2\pi) = 2A(\pi)$ 。
 - (3) $A(4\pi) = 2A(2\pi)$ 。
 - (4) $A(3\pi) - A(2\pi) > A(2\pi) - A(\pi)$ 。
5. 已知整係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(2) = f(4) = f(6) = 0$ ，而且除了 $x = 2, 4, 6$ 之外， $f(x)$ 的函數值恆正。下列選項有哪些必定是正確的？
- (1) $f(x)$ 的次數至少為 6。
 - (2) $f(x)$ 的次數為奇數。
 - (3) $f(1)$ 為奇數。
 - (4) $f'(4) = 0$ 。

三、題組 (22 %)

說明：第 6 至 8 題為一完整之題組，請詳細閱讀後回答問題。第 6 題為單選題，第 7、8 兩題為多選題。其選項、作答、計分方式，與前面單選題和多選題之規定相同。

使用圓球和球袋作機率實驗。球只有黑白兩色，袋中裝有兩顆球，因此只有三種可能情況：把雙白球稱為狀態 1，一白球一黑球稱為狀態 2，雙黑球稱為狀態 3。對這袋球做如下操作：自袋中隨機移走一球後，再隨機移入一顆白球或黑球（移入白球或黑球的機率相等）。每次操作可能會改變袋中球的狀態。

6. (單選題，6 分) 如果現在袋子內的球是一白一黑（即狀態 2），請問經過一次操作後，袋中會變成兩顆黑球（狀態 3）的機率是多少？

- (1) $\frac{1}{4}$
- (2) $\frac{1}{3}$
- (3) $\frac{1}{2}$
- (4) $\frac{2}{3}$

把從狀態 j 經過一次操作後會變成狀態 i 的機率記為 p_{ij} （例如上題的機率就是 p_{32} ），由此構成一 3×3 矩陣 P 。

7. (多選題，8 分) 針對矩陣 P ，下列選項有哪些是正確的？

- (1) 矩陣 P 滿足 $p_{ij} = p_{ji}$ 。
- (2) P 是轉移矩陣（即每行之和皆為 1）。
- (3) P 的行列式值為正。
- (4) $p_{11} = p_{33}$ 。

把矩陣 P 連續自乘 k 次後的矩陣記為 P^k 。已知矩陣 P^k 中 (i, j) 位置的值，等於從狀態 j 經過 k 次操作後，變成狀態 i 的機率。

8. (多選題, 8 分) 針對多次操作, 下列選項有哪些是正確的?
- (1) 從一白一黑 (狀態 2) 開始, 經過 k 次操作後, 變成雙白 (狀態 1) 的機率與變成雙黑 (狀態 3) 的機率相等。
 - (2) 從雙白 (狀態 1) 開始, 經過 k 次操作後, 回到雙白 (狀態 1) 的機率, 比變成雙黑 (狀態 3) 的機率高。
 - (3) 從雙白 (狀態 1) 開始, 經過 k 次操作後, 回到雙白 (狀態 1) 的機率, 會隨著次數 k 的增加而遞減。
 - (4) 不論從哪種狀態開始, 經過 k 次操作後, 變成任何一種狀態的機率, 會隨著 k 趨近於無窮大而趨近於 $\frac{1}{3}$ 。

四、選填題 (16 %)

說明：A、B 兩題為選填題，請在答案卡的「解答欄」之列號 (9-13) 中標示答案。每一題完全答對得 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若坐標平面上滿足 $2x^2 + axy + 2y^2 = 1$ 的點 (x, y) ，都滿足 $x^2 + y^2 \leq 1$ ，則 a 的最小可能值為 ⑨⑩。

B. 將 $\tan x = x$ 的所有正實根由小到大排列，得一無窮數列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ，則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \underline{\textcircled{11} \cdot \textcircled{12} \textcircled{13}} \quad (\text{四捨五入到小數第二位})。$$

----- 以下部分作答於答案卷 -----

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二），同時必須寫出演算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一、若有 θ 使下述方程組不只有一組解，求 $\sin\theta + \cos\theta$ 的值。（12 分）

$$\begin{cases} (1 + \cos\theta)x - y = 0 \\ -x + (1 + \sin\theta)y = 0 \end{cases}$$

二、設 k 為一常數。已知一拋物線通過點 $(2,0)$ ，且焦點為 $(1,2)$ ，準線為 $kx + y + 1 = 0$ ，求此拋物線頂點的坐標。（12 分）